M. v. Smoluchowski. Ueberreicht vom Verfasser.

Physikalische Zeitschrift. 2. Jahrgang. No. 20. Seite 307—313.



Über die Atmosphäre der Erde und der Planeten.

Von M. v. Smoluchowski.[1])

Über die Zustände in den höheren Atmosphärenschichten, namentlich auch über die Frage, ob die Gashülle der Erde begrenzt ist, und ob auf anderen Himmelskörpern eine Atmosphäre vorhanden ist, herrschen noch so verworrene Ansichten, dass es wünschenswert scheint, zu untersuchen, inwieweit man durch rein theoretische Erwägungen zu einer kritischen Sichtung der diesbezüglichen Hypothesen gelangen kann. Solche Betrachtungen, nicht aber eine Zusammenstellung der bisherigen experimentellen Ergebnisse [siehe diesbezügl. z. B Günther Geophysik] bilden den Zweck dieser Zeilen.

Wäre die Erdatmosphäre ein ruhendes Gas von gleichförmiger Temperatur, so wäre der Druck in der Entfernung r vom Mittelpunkte gegeben durch die Formel

$$p = p_0 e^{-\frac{ga}{R\Theta_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)}$$

wo a den Erdradius, R die Gaskonstante bedeutet. Daraus würde sogar für unendliche Entfernung eine endliche Dichte folgen, nämlich $\varrho = \varrho_0 \cdot 10^{-356}$, und die Gesamtmasse wäre natürlich unendlich (Mascart C. R. 114).

Nach Melanderhjelm und Laplace soll jedoch die Centrifugalkraft der Erdrotation eine Begrenzung der Gasmasse bewirken; dort wo dieselbe der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, wäre die Grenzfläche zu suchen. Verlangt man nun Gleichheit der Kräfte für die Richtung der Centrifugalkraft, so erhält man als Grenzfläche eine Kugel mit einem Radius $r = \sqrt[3]{\frac{ga^2}{\omega^2}} = 42\,000$ km, dagegen eine Fläche $r^3 = \frac{ga^2}{\omega^2 \cos^2\Theta}$, wenn man die Gleichgewichtsbedingung für die Richtung der Schwerkraft aufstellt. In beiden Fällen verbleiben natürlich unkompensierte Komponenten.

Darin, dass diese Komponenten, sowie die Druckkräfte, welche in dem Gase bestehen müssen, nicht berücksichtigt werden, liegt offenbar der prinzipielle Fehler dieser Berechnungen.

Man muss also nach Neumann die Gleichung der Hydrostatik $\int \frac{dp}{\varrho} = U$ zu Hilfe nehmen und darin das Potential der Centrifugalkraft und der Gravitation einführen, wodurch man erhält:

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{R\Theta}\left[ga\left(1-\frac{a}{r}\right) - \frac{\omega^2 r^2 \cos^2\varphi}{2}\right]}$$

Die Niveauflächen bilden drei Systeme; für kleine r sind sie annähernd ellipsoidisch bis zur Fläche kleinsten Druckes mit dem früher erwähnten Äquatorial-Radius $r_0 = \sqrt[3]{\frac{ga^2}{\omega^2}}$ und einem Polarradius $r = \frac{2}{3} r_0 = 28\,000$ km. Für grössere r entstehen zwei ins Unendliche reichende Systeme, von denen das eine (in Richtung der Äquators gelegene) jedoch wieder wachsenden Drucken entspricht. Man müsste also jene Fläche als Grenzfläche ansehen, da man nicht annehmen kann, dass die ganze Weltatmosphäre mit der Erde mitrotiert.

Auerbach (Winkelm. Handb. I, S. 527) bestreitet überhaupt die Berechtigung der Annahme, dass die Atmosphäre als Ganzes mitrotiert, da nach obiger Formel für $r = a$ am Äquator ein viermal so grosser Druck sich ergiebt als am Pole, was mit der Erfahrung in Widerspruch steht.

Dieser Einwand ist aber ungerechtfertigt, da wir ja am Äquator den Druck nicht in der Entfernung a, sondern in einer um 21 km grösseren (wegen der Erd-Abplattung) messen. Überhaupt ist ein derartiger Widerspruch nicht möglich, da ja den hydrostatischen Gleichungen zufolge die Grenzfläche zweier Flüssigkeiten (Wasser und Luft) eine Fläche konstanten Druckes sein muss.

1) Auszug aus einer Abhandlung gleichen Titels, erschienen in dem anlässlich der 500jährigen Gründungsfeier der Krakauer Universität von der Lemberger Universität herausgegebenen Jubiläumswerke.

Dagegen muss man gegen jene Berechnung zwei Einwände anderer Art erheben:

1. Auch in jener Grenzfläche ist der Druck noch nicht Null, sondern $p = 10^{-175} p_0$. Auch dies müsste durch den Gegendruck einer äusseren ruhenden „Himmelsatmosphäre" äquilibriert werden, dann käme jedoch infolge innerer Reibung ein Geschwindigkeitsgefälle zu stande, welches die ganze Rechnung hinfällig macht.

2. Es wurde die Ungleichförmigkeit der Temperatur nicht berücksichtigt, welche auf die Druckverteilung einen viel grösseren Einfluss ausübt, als die Centrifugalkraft.

Auf die Wichtigkeit dieses letzteren Faktors wurde schon 1819 von G. Schmidt [Gilberts Ann. 62] hingewiesen; die in jener Arbeit durchgeführte Berechnung der „Höhe der Atmosphäre" zu 6.6 bis 27.5 g. M., welche auf unbegründeter Extrapolation einer empirischen Temperaturformel beruht, ist jedoch wertlos.

Die erste rationelle Theorie dieser Art, die bekannte Theorie des „konvektiven", „indifferenten" oder „adiabatischen" Gleichgewichtes, verdanken wir Lord Kelvin. Kelvin nimmt an, dass Wärmeleitung und Strahlung in Anbetracht der Geschwindigkeit der atmosphärischen Cirkulation von so geringem Einfluss sind, dass im wesentlichen die Formel für adiabatische Zustandsänderungen $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k$ zutreffen wird, mit Hilfe deren die hydrostatischen Gleichungen ergeben:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = 1 - \frac{k-1}{k} \frac{ga}{R\Theta_0} \left[1 - \frac{a}{r}\right]$$

für kleine Erhebungen $x = r - a$ annähernd:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = 1 - \frac{k-1}{k} \frac{gx}{R\Theta_0}$$

Nun wäre gemäss dieser Formel schon in einer Höhe von 29 km der absolute Nullpunkt der Temperatur erreicht (unter Voraussetzung $\Theta_0 = 10^0$ C.) Da aber die Temperatur überhaupt nicht negativ werden kann, so müssten also die Anhänger der „begrenzten Atmosphären"-Theorie in dieser Höhe die Grenze der Atmosphäre annehmen, obwohl allerdings Kelvin selber sagt: „Es schien mir immer höchst unwahrscheinlich, dass überhaupt eine Grenze der Atmosphäre existiert, und gewiss kann sie nicht in so geringer Höhe liegen". (Math. Phys. Papers III, S. 256.)

Kelvin selbst weisst auf den Einfluss der Strahlung und der Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz hin, welche das obige Resultat modifizieren müssten. In der That ist es ja wohl unzweifelhaft nachgewiesen, dass unsere Atmosphäre noch in Höhen von mehr als 200 km hinreichend dicht ist, um Meteore erglühen zu machen; dass aber Kelvins Erklärung nicht in jeder Beziehung ausreichend ist, werden wir weiter unten nachweisen.

Bekanntlich widerspricht die Formel auch in Bezug auf die Grösse des Temperaturgradienten $\frac{d\Theta}{dx}$, der sich zu 1^0 pro 100 m ergiebt, den zahlreichen auf Bergen und bei Ballonfahrten gemachten Erfahrungen, welche für die unteren Atmosphärenschichten im Mittel ca. 0.58 pro 100 m ergeben haben.

Dies wird von Kelvin, in Ausführung eines Gedankens von Joule, durch den Einfluss der Kondensationswärme des Wasserdampfes erklärt, infolge deren die bei der Ausdehnung der Luft erfolgende Abkühlung vermindert wird. So müsste ein mit Dampf gesättigter aufsteigender Luftstrom z. B. bei der Temperatur $\Theta = 0$ einen Temperaturgradienten $\frac{d\Theta}{dx} = 0.66^0$, bei $\Theta = 10$, $\frac{d\Theta}{dx} = 0.54^0$ aufweisen. Gegen die Allgemeingültigkeit dieser Erklärung erheben sich jedoch manche Bedenken. So setzt sie voraus, dass Kondensation thatsächlich eintritt, kann sich also auf wolkenfreie Schichten der Atmosphäre nicht beziehen; in anticyklonalen Gebieten kann sie schon gar nicht zutreffen, während auch dort ein ähnlicher Temperaturgradient gefunden wird und überhaupt ergiebt sich der beobachtete Temperaturgradient immer noch erheblich kleiner als die berechneten Werte.

Als Beispiel möchte ich einige dem jüngst erschienen Schriftchen Bezolds: „Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der wissenschaftlichen Luftfahrten" entnommene Zahlen anführen, welche Mittelwerte aus den zahlreichen in Assmanns und Bersons Werke: „Wissenschaftliche Luftfahrten" gesammelten Beobachtungsdaten bilden, nebst den für einen feuchten aufsteigenden Luftstrom (von der Anfangstemperatur 10^0) geltenden theoretischen Werten, welche ich nach Kelvins Methode beiläufig berechnet habe.

Temperaturgradient (Mittelpunkttemperatur am Erdboden $\Theta_0 = 10.3^0$):

Höhenschichte	0—1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000 m
Mittel	0.49	0·50	0·54	0·53	0·64	0·69	0·68	0·72	0·80	0·80
Cyklonal	0·59	0.59	0·55	0·59	0·75					
Anticyklonal	0·36	0·46	0·51	0·48	0·55					
Berechnet nach Kelvin	0·58	0·62	0·70	0·76	0·87					

Der Einfluss der Kondensationswärme wird bei wachsender Höhe, also abnehmender Temperatur, wegen der raschen Abnahme des Dampfgehaltes immer kleiner, und es sollte sich der Gradient dem Werte 1^0 für trockene Luft nähern; dies findet auch thatsächlich statt — wodurch die früheren Beobachtungen von Glaisher, die Formeln von Mendelejeff etc. als unrichtig erwiesen sind —, aber in viel geringerem Maasse, als theoretisch zu erwarten wäre.

Es scheint nach alledem, dass bei dieser Erscheinung doch auch noch andere Faktoren, also vor allem die Strahlung, in erheblichem Maasse mitspielen; dabei wäre nicht nur die Absorption der Sonnenstrahlung in der freien Atmosphäre, am Erdboden und in den Wolken, sondern auch der gegenseitige Wärmeaustausch der verschiedenen Atmosphärenschichten und die Ausstrahlung in den Weltraum zu berücksichtigen.

So erklärt Bezold (loc. cit.) den geringen Wert des Temperaturgefälles über dem Erdboden durch die zeitweise überwiegende Ausstrahlung des Erdbodens, infolge deren häufig sogar eine „Temperaturumkehr" eintritt, während die entsprechende Erwärmung der unteren Schichten durch Bestrahlung des Erdbodens keine analoge Verminderung des Temperaturgradienten hervorrufen kann, da der Zustand labil wird, sobald letzterer den Wert 1.0^0 (pro 100 m) übersteigt. [Für grössere Höhen ist aber diese Erklärung wohl nicht ausreichend. (Zusatz d. Verf.)]

Es drängt sich nun die Frage auf, inwiefern diese beiden Faktoren, die Kondensationswärme des Wasserdampfes und die Strahlung, auch das früher erwähnte merkwürdige Resultat, dass eine Begrenzung der Atmosphäre und zwar bereits in sehr geringer Höhe stattfinden muss, zu modifizieren vermögen.

Diesbezüglich wurde schon von Ritter (siehe weiter unten) nachgewiesen, dass der Wasserdampfgehalt der Luft nur eine relativ geringe Erhöhung der betreffenden Grenzschichte bewirken kann, da sein Einfluss nur in den untersten warmen Schichten zur Geltung kommt.

Um über den Einfluss des zweiten Faktors eine Vorstellung zu gewinnen, habe ich ein Beispiel berechnet, in welchem derselbe im Vergleich mit der Wirklichkeit noch bedeutend übertrieben ist, nämlich die Temperaturverteilung in einem (mit der Geschwindigkeit u_0 im Niveau $x = o$) aufsteigenden Luftstrom, welcher pro cm^3 die Sonnenwärme (in mechanischem Maasse) $S\varrho = J \alpha s \varrho$ absorbiert [α = Absorptionskoeffizient, von der Grössenordnung $\alpha = 0.00033$, s = Sonnenstrahlung = ca. 0.05], wobei also die Abkühlung infolge Ausstrahlung gar nicht berücksichtigt wird. Die Integration der betreffenden Differentialgleichung ergiebt als „kritische Höhe" [für $\Theta = o$]:

$$\varkappa = \frac{k}{k-1} \frac{\Theta_0 R}{g} \left[1 + \frac{k-1}{k} \frac{S}{u_0 g} \right]$$

Also würde die Strahlung bei Einsetzung plausibler Werte für u_0 nur eine geringe Erhöhung bewirken $\left(\text{z. B. ca. } 5\% \text{ für } u_0 = 10 \frac{cm}{sec}\right)$, jedenfalls aber das Resultat, dass es eine Grenze giebt, nicht ändern.

Es bleibt also noch zu untersuchen, inwieweit die Abweichung der Luft vom idealen Gaszustande diese Verhältnisse ändern wird.

Diesbezüglich hat Ritter eine beachtenswerte Theorie entwickelt, indem er berücksichtigte, dass ein aufsteigender Luftstrom unter Voraussetzung des rein adiabatischen Zustandes wegen successiver Abkühlung in genügender Höhe den Verflüssigungspunkt der Luft erreichen muss, so dass von dort an eine Verminderung des Temperaturgefälles eintritt, ähnlich aber in höherem Maasse wie in mit Wasserdampf gesättigter Luft.

Ritter berechnete die Höhe einer solchen Atmosphäre, da die betreffenden Daten für Luft fehlten, unter Annahme der auf Wasserdampf bezüglichen Zahlen zu 349 km. Abgesehen von der hierdurch entstehenden Unsicherheit[1]), ist gegen die Berechnung einzuwenden, dass sie ein Mitführen der kondensierten Flüssigkeitströpfchen voraussetzt, was bei den höheren Kondensationsgraden offenbar nicht möglich ist. Auch müsste der ganze Himmel mit „Luftwolken" bedeckt erscheinen, was thatsächlich nicht stattfindet. Auf diesen Punkt werden wir übrigens später noch zu sprechen kommen. Vorderhand müssen wir festhalten, dass die Berücksichtigung der Kondensationserscheinungen zwar die Grenze der Atmosphäre hinausschiebt, aber die Folgerung, dass es eine solche Grenze giebt, nicht zu beseitigen vermag.

Demgegenüber ist zu bemerken, dass einfache, auf die kinetische Gastheorie gestützte Erwägungen zu einem ganz entgegensetzten Resultate führen. Sobald ein Molekül eine grössere Geschwindigkeit erlangt, als $V = \sqrt{2ga}$, d. i. ca. 11 km, muss es auf hyperbolischer Bahn sich von der Erde in den Weltraum hinaus entfernen (falls es nicht vorher mit einem anderen Molekül zusammenstösst!).

Da nun im Gase alle möglichen Geschwindigkeiten vertreten sind, wird die Erdatmosphäre fortwährend solche Teilchen verlieren; dieselben werden sich ausserhalb der Sphäre

1) In Wasserdampf würde die Kondensation vom O-Punkte an beginnen; in Luft tritt sie (nach Olszewski) z. B. bei 4 mm Druck erst bei — 211^0 ein.

der Erdanziehung bewegen, dort mitunter kollidieren, eventuell wieder auf die Erde zurückfallen etc., kurz ein Medium bilden, welches denselben Gascharakter hat wie die Erdatmosphäre. So führt uns, wie schon M. P. Rudzki [Zapiski mat. obszcz. Odessa 15 (1893) S. 71] hervorhebt, die kinetische Gastheorie zu dem Resultate, dass die Atmosphäre unbegrenzt ist. Es können kolossale Dichtigkeits- und Temperaturunterschiede bestehen, aber überall muss es Gas von einer endlichen Dichtigkeit geben, und fortwährend muss ein allseitiger Austausch der Moleküle vor sich gehen. [Auf die diesbezüglichen Untersuchungen Stoneys werden wir am Schlusse noch zu sprechen kommen.]

Nun kann aber die kinetische Gastheorie in diesen Dingen unmöglich mit den allgemeinen hydromechanischen und thermodynamischen Gleichungen in Widerspruch stehen, da letztere aus ihr abgeleitet werden können. Somit müssen wir bei den früheren Überlegungen einen ausschlaggebenden Faktor ausser acht gelassen haben.

In dem Mechanismus der Gastheorie sind nun implicite schon zwei Erscheinungen enthalten, welche wir bisher nicht berücksichtigt haben: die Wärmeleitung und die innere Reibung. Wäre die Atmosphäre in Ruhe, so wäre auch nach der kinetischen Gastheorie der isotherme Zustand der einzig mögliche Gleichgewichtszustand[1]) — die so sehr verbreitete Meinung, dass die Gastheorie in diesem Falle das der adiabatischen Gleichung entsprechende Temperaturgefälle liefere[2]), beruht auf Fehlschlüssen. In Anbetracht der thatsächlich stattfindenden Cirkulation ist jedoch die Wärmeleitung ganz zu vernachlässigen, und wir würden jenen „adiabatischen" Zustand erhalten, — wenn nicht überdies die innere Reibung vorhanden wäre.

Bezüglich der inneren Reibung scheint die Ansicht zu herrschen, dass man ihren Einfluss bei derartigen Fragen der atmosphärischen Cirkulation vernachlässigen kann, seitdem Helmholtz gezeigt hat, wie ausserordentlich geringfügig der Reibungswiderstand ist, welchen die Atmosphärenschichten bei ihrer horizontalen Bewegung erfahren.

Hier jedoch verhält sich die Sache ganz anders, es kommt nicht die Reibung paralleler Schichten bei tangentialer Bewegungs-Richtung in Betracht, sondern bei normaler Richtung der Strömung, nebst der mit Volumänderung verbundenen Reibung.

Um sich über diese Verhältnisse klar zu werden, muss man auf die Grundformeln reibender Flüssigkeiten zurückgreifen, welche hier jedoch eine etwas kompliziertere Gestalt annehmen, da man auch den Reibungskoeffizienten μ als veränderlich betrachten muss. Ausserdem ist die „Temperaturgleichung" zu modifizieren durch Berücksichtigung des wärmenden Einflusses der Reibung, welcher durch die „Dissipationsfunktion" (siehe z. B. Lamb, Hydrodynamics S. 518) bestimmt wird.

So erhält man [wenn μ proportional der Temperatur gesetzt wird $\mu = \gamma\Theta$[1])] für die stationäre vertikale Bewegung einer Luftsäule (bei Vernachlässigung der kinetischen Energie) die Bewegungsgleichung:

$$g = -R\frac{d\Theta}{dx} + \frac{\Theta R}{u}\frac{du}{dx} + \frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}u\frac{d}{dx}\left[\Theta\frac{du}{dx}\right]$$

und die Temperaturgleichung:

$$\frac{c}{A}\frac{d\Theta}{dx} + \frac{R\Theta}{u}\frac{du}{dx} = \frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}\Theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

wobei b das Produkt aus Dichte und Geschwindigkeit bedeutet $b = \varrho u$, welches wegen der Kontinuitätsgleichung konstant sein muss. Die obere Gleichung kann man nach Addition der unteren einmal integrieren; die vollständige Integration des Gleichungs-Systems stösst aber auf Schwierigkeiten.

Doch kann man durch Diskussion desselben schon eine Vorstellung über den qualitativen Charakter der Erscheinung erhalten. Anschaulicher wird dies illustriert durch folgende hypothetische Aufgabe: Es gehe in vertikaler Richtung eine stationäre Strömung der Luft vor sich, und zwar ohne innere Reibung [mit der Geschwindigkeit u_0 im Niveau $x = o$], so dass sich die Kelvin'sche adiabatische Temperaturverteilung herstellt.

Nun beginne plötzlich die gewöhnliche innere Reibung zu wirken. Ihr Einfluss wird sich in der Verzögerung der Bewegung

$$-\frac{du}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}u'\frac{d}{dx}\left(\Theta'\frac{du'}{dx}\right)$$

und in der (pro gr Luft auf dem Wege 1 cm) in Wärme umgesetzten Bewegungsenergie

$$Q = \frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}\Theta'\left(\frac{du'}{dx}\right)^2$$

zeigen, welche unter obiger Annahme identisch werden, nämlich

$$= \frac{4}{3}\mu_0 k^2 g^2 \frac{u_0 \varrho_0}{p_0{}^2}\left(\frac{\Theta_0}{\Theta'}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Ein Luftteilchen wird somit auf dem Wege 1 cm seine Temperatur ändern gemäss der Gleichung

$$\frac{D\Theta}{Dx} = \frac{A}{c}\left[Q - \frac{p}{u\varrho}\frac{du}{dx}\right]$$

In der nachfolgenden Tabelle habe ich für

1) Siehe z. B. Boltzmann, Gastheorie I, 134.
2) Siehe z. B. Möller, Met. Ztschr. 10, 298 (1893).

1) In Wirklichkeit ist μ einer Potenz der Temperatur proportional, welche bei den schweren Gasen 1, bei den leichten ca 2/3 beträgt.

einige Anfangsgeschwindigkeiten u_0 die Werte $\frac{du}{dt}$ und $\frac{D\Theta}{Dx}$ (in Graden pro 100 m) in verschiedenen Höhen zusammengestellt, wobei statt der Höhe x die — proportional mit der Höhe bis 0 abnehmende — absolute Temperatur Θ angegeben ist.

I. $-\frac{du}{dt}=$

$\Theta_0 =$	23^0	3^0	2^0	1^0 (abs.)
$u_0 = 1$	$1{\cdot}7 \cdot 10^{-6}$	0·35	5·0	253
$u_0 = 10$	$1{\cdot}7 \cdot 10^{-5}$	3 5	50	2530
$u_0 = 100$	$1{\cdot}7 \cdot 10^{-4}$	35	500	25300
$u_0 = 500$	$8{\cdot}5 \cdot 10^{-4}$	175	2500	126500

II. $\frac{D\Theta}{Dx}=$.

$\Theta_0 =$	23^0	3^0	2^0	1^0
$u_0 = 1$	—1·01	—1·01	—1·00	— 0.65
$u_0 = 10$	—1 01	—1·00	—0.94	+ 2 65
$u_0 = 100$	—1·01	—0 96	—0·29	+ 35·6
$u_0 = 500$	—1·01	—0·76	+2·61	+182·2

Während also die Hemmung z. B. an der Erdoberfläche nur $\frac{du}{dt} = -0.61 \cdot 10^{-13}\, u$ beträgt, so würde sie in den höchsten Schichten so enorme Werte erreichen, wie die Tabelle I zeigt. Als Vergleich führe ich Helmholtz' Resultat, betreffs der Hemmung horizontaler Luftbewegung an, wonach die innere Reibung die Bewegungsgeschwindigkeit der oberen Luftschichten in 42.747 Jahren auf die Hälfte vermindern würde, was einem Werte

$$\frac{du}{dt} = -0.75 \cdot 10^{-13}\, u$$

entspricht.

Die zweite Tabelle führt uns den erwärmenden Einfluss der Reibung vor Augen, welcher nicht nur eine Abkühlung bis zum Nullpunkt verhindert, sondern sogar das Zeichen von $\frac{D\Theta}{Dx}$ ändert.

Natürlich gilt dies alles nur für den ersten Moment, aber das Beispiel illustriert doch anschaulich den in gewisser Höhe enorm zunehmenden hemmenden (in Bezug auf vertikale Strömungen) und erwärmenden Einfluss der inneren Reibung, welcher darin begründet ist, dass der Koeffizient derselben vom Gasdrucke unabhängig ist.

Die nach der adiabatischen Theorie berechnete „Höhe" der Atmosphäre giebt uns also nur ein ungefähres Maass der Schichte (ca. 30 km), innerhalb welcher die ungestörte atmosphärische Cirkulation stattfindet, wo man also von innerer Reibung absehen kann.

In höheren Schichten verliert jene Theorie die Berechtigung; die Abkühlung eines aufsteigenden Luftstromes kann infolge der Reibung nicht bis zum absoluten Nullpunkt fortschreiten.

In Wirklichkeit ist auch noch zu berücksichtigen, dass eben wegen der Hemmung der Strömungen auch der Einfluss der Strahlungsabsorption, ja auch der Wärmeleitung erhöht werden wird.

Durch die Temperaturverhältnisse wird also keine „Begrenzung" der Atmosphäre bewirkt und ebensowenig durch die Centrifugalkraft; letztere wird überhaupt nur eine geringe Druckänderung bewirken, da die äusseren Schichten mit nach oben abnehmender Geschwindigkeit an der Erdrotation teilnehmen werden. Mit einiger Annäherung kann man hierauf die Formel anwenden, welche für die analoge Flüssigkeitsbewegung gilt: $\omega = \omega_0 \frac{a^3}{r^3}$ (vergl. Lamb, S. 525). Es ergiebt sich, dass erst in der Höhe von $6\frac{1}{2}$ km eine Horizontalgeschwindigkeit von $1\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ auftreten würde [in Wirklichkeit noch weit weniger wegen der Veränderlichkeit von μ], so dass die unteren Atmosphärenschichten vollständig an der Erdrotation teilnehmen, und erst in sehr grossen Höhen sich der von W nach E gerichtete Strom bemerkbar machen kann. Die Hemmung der Erdrotation [Moment $= 8\pi\mu a^2\omega_0$ (loc. cit.)] würde das Jahr um den 10^{-17} Teil einer Sekunde verlängern, also nur um eine unmessbar kleine Grösse. Ebenso bleibt die Druckdifferenz an der Vorder- und Rückseite (Morgen und Abend) der Erde weit unter der Grenze der Messbarkeit mittelst physikalischer oder astronomischer Methoden (loc. cit.). So kann auch von dieser Seite aus kein Einwand gegen das Resultat erhoben werden, dass sich die Atmosphäre in die ungemessene Ferne des Weltraumes erstreckt. Ihre Dichte wird zwar schon in der Entfernung von einem Erdradius ganz ausserordentlich gering sein [1]), aber die Unterschiede zwischen jener „Himmelsluft" und unserer Atmosphäre können nur quantitative sein. An eine numerische Berechnung der Druck- und Temperaturverhältnisse in jenen oberen Regionen ist allerdings vorderhand noch nicht zu denken; denn, abgesehen von den mathematischen Schwierigkeiten, würde sie eine genaue Kenntnis der gesamten atmosphärischen Cirkulation (vergl. den Einfluss von u_0 in der Tabelle), der Absorptionsverhältnisse der Luft bei tiefen Temperaturen etc. voraus-

1) Der Druck muss kleiner sein, als die Formel (1) angiebt, also im obigen Falle unter 10^{-8} mm liegen.

setzen, da sich das Problem nicht als statisches, sondern als ein wesentlich dynamisches darstellt.

Es scheint daher auch schwer, zu entscheiden, ob der Verflüssigungspunkt der Luft erreicht wird; wäre der Zustand rein adiabatisch, so wäre dies unvermeidlich; in Wirklichkeit aber hängt es von dem noch ungewissen Verhältnis zwischen Druckgefälle und Temperaturgefälle in grossen Höhen ab, ob die Dampfdruckkurve der Luft geschnitten wird.

Es drängt sich der Gedanke auf, dass vielleicht die hie und da beobachteten „leuchtenden Nachtwolken" durch solche Kondensation der Luft erklärt werden könnten; denn wenn wir den Berechnungen ihrer Höhe zu über 100 km Höhe Glauben schenken, können wir schwerlich annehmen, dass sie aus Wasser resp. Eis bestehen können.[1])

Als Gegengrund gegen die Annahme einer Himmelsatmosphäre wird oft die Abwesenheit (richtiger Nichtnachweisbarkeit!) einer Mondatmosphäre angeführt. Wendet man aber die Gleichungen der Aërostatik auf das aus zwei Kugeln [Massen m und μ, Radien a und α] bestehende System Erde — Mond an, so erhält man für einen isothermen Zustand als Dichte der Mondatmosphäre

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\frac{g a}{R \Theta}\left[1 - \frac{\mu a}{m \alpha}\right]} = \varrho_0 \, . \, 10^{-340}$$

und für einen adiabatischen Zustand:

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{\mu a}{m}\right)^{\frac{1}{k-1}} = 0.00045 \cdot \varrho_0 \text{ und } \Theta = \Theta_0\left(\frac{\mu a}{m \alpha}\right) = -260{,}5^0 \text{ C.}$$

Selbstverständlich sind diese Berechnungen in quantitativer Hinsicht wertlos, aber sie zeigen doch, dass man sich eher wundern müsste, wenn auf dem Monde eine Atmosphäre von höherer Grössenordnung der Dichte als $\varrho = 0.003 \, \varrho_0$ bestehen würde — und dies ist die von den Astronomen als zulässig bezeichnete Grenze.

Bezüglich verschiedener vom astronomischen Standpunkte aus für die Existenz eines Gasmediums sprechende Gründe verweise ich im übrigen auf Berberich's Aufsatz (Naturw. Rdsch. XIV. [1899] S. 365, 377).

Auch bei Erklärung von astronomischen Erscheinungen wie Nebelflecken, Kometenschweifen etc. mögen jene früher erwähnten, an Stellen, wo die Temperatur- und Dichtezustände die Dampfdruckkurve schneiden, erfolgenden Kondensationsvorgänge vielleicht noch eine Rolle spielen.

Es erübrigt uns noch eine Diskussion der Erscheinungen, welche auf der Zusammengesetztheit der Luft aus verschiedenen Gasen beruhen. Wäre die Atmosphäre in absoluter Ruhe, so würde nach Dalton's Gesetz der Partialdruck jeden Gases der Formel (1) genügen, als ob die anderen Gase nicht vorhanden wären. Wegen der Unterschiede in dem der Dichte proportionalen Werte der Gaskonstante R würde sich somit die Zusammensetzung der Atmosphäre mit der Höhe ändern, wie dies folgende von Hann berechnete Tabelle ersichtlich macht:

Höhe x		0	10000	20000	40000 m.
O_2	Gehalt	21.00	18.35	15.92	11.54
N_2	Gehalt	78.96	81.63	84.07	88.46

In Wirklichkeit ist es aber noch nicht gelungen, einen Unterschied zu konstatieren; selbst die durch einen Registrierballon in 15000 m Höhe geschöpfte Luft war nach Hergesell fast ganz normal zusammengesetzt: 78.27 N_2, 20.79 O_2, 0.94 A [Fortschr. d. Ph. 53 (1897) p. 192], während das normale Verhältnis ist: 78.06 N_2, 21.00 O_2, 0.94 A. Dies ist in der Langsamkeit begründet, mit welcher wie alle Diffussionsvorgänge, so hier die Entmischung der Luft vor sich geht. Ich habe (in der Orig.-Abhandlg.) aus der Maxwell-Boltzmann'schen Diffusionsgleichung berechnet, dass die relative Geschwindigkeit der Sauerstoff- und Stickstoffströmung, wenn man die ganze Luftmasse gleichmässig durchmischen und dann sich selbst überlassen würde, am Meeresniveau nur $3.10^{-8} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ betragen würde. Somit ist es ganz natürlich, dass dieser Entmischungsvorgang durch die infolge atmosphärischer Strömungen verursachte Mischung vollständig neutralisiert wird. Erst in den oberen Atmosphärenschichten, wo die Vertikalströmungen vermindert sind, dürfte derselbe zur Geltung kommen, und es ist wahrscheinlich, dass in grösserer Entfernung von der Erde die leichteren Gase He, H_2, überwiegen. Experimentell liesse sich übrigens vielleicht eher ein Unterschied im Gehalte von $A = 40$, $Ne = 80$, $Xe = 128$ und $He = 4$, nachweisen als in dem, störenden Einflüssen unterliegenden, Verhältnis der an Dichte wenig verschiedenen $O : N$. Auch sollten in cyklonalen Gebieten die schwereren Bestandteile vorherrschen, in anticyklonalen die leichteren; der Unterschied würde auf die Ausdehnung des Cyklons schliessen lassen.

In Anbetracht dieser dürftigen Ergebnisse der Theorie und der negativen Ergebnisse der Praxis erschien es nun höchst überraschend, dass es J. Stoney gelungen sein sollte, bloss auf Grund der Kenntnis von Masse und Grösse der Planeten die Zusammensetzung der Gas-

1) Ich habe für den Wasserdampfdruck eine Extrapolationsformel in derselben Weise berechnet, wie es Herz für Quecksilberdampf that, aus welcher sich z. B. schon für — 100⁰ ein Dampfdruck von bloss $3{\cdot}6.10^{-5}$ mm ergiebt, und in jenen Höhen müsste eine noch weit niedrigere Temperatur herrschen.

hülle derselben zu berechnen. Da ich in der That seine in der Arbeit „Of Atmospheres of Planets and Satellites“ (Trans. Roy. Dublin Soc. VI [1897] S. 305) dargelegten Erwägungen, welche seinerzeit ziemliches Aufsehen erregten, für verfehlt halte, möchte ich daher diesbezüglich noch einige Worte anschliessen.

Stoney stützt sich auf das Resultat, dass Moleküle deren Geschwindigkeit $\sqrt{2ga}$ übersteigt, von der Erde „verloren“ werden. Indem er die Höhe der Atmosphäre zu 200 km und deren Temperatur in der Grenzschicht (?) zu -66^0 C. (!) annimmt, berechnet er das Verhältnis der mittleren Molekulargeschwindigkeiten verschiedener Gase zu jener kritischen Geschwindigkeit. Dann schliesst er: Die Erfahrung lehrt, dass unsere Erde He und H_2 verloren hat, denn diese Gase sind in der Atmosphäre nicht enthalten, obwohl sie durch Quellen und unterseeische Vulkane (?) ausgeschieden werden, dass dagegen O_2 und N_2 erhalten bleiben; also wird ein Gas verloren, wenn seine Molekulargeschwindigkeit grösser als $\frac{1}{9}$ der kritischen ist (wie hier bei H_2 und He); dagegen bleibt der Verlust unmerklich, wenn sie bloss $\frac{1}{20}$ beträgt (wie bei N_2 und O_2). Und diese Regel wird dann auf die Planeten angewendet und so gewissermassen „a priori“ die Zusammensetzung ihrer Atmosphäre berechnet.

Vor allem muss man gegen die undenkbaren Annahmen bezüglich der „Grenze“ der Atmosphäre protestieren, sodann gegen die über das Vorkommen von H_2 und He gemachten Voraussetzungen. Warum ist der Gehalt an Xe und Ne so gering, wenn nur die Molekulargeschwindigkeit, also die Dichte des Gases, in Betracht kommt?

Aber ein prinzipieller Einwand ist überhaupt gegen die Art zu erheben, in welcher die Gastheorie verwendet wird. Es werden nur die abgeworfenen Teilchen berücksichtigt, nicht aber jene, welche von aussen in die Anziehungssphäre der Erde gelangen; auch jene „verlorenen“ Teilchen können untereinander oder mit den noch in elliptischen Bahnen sich bewegenden Teilchen zusammenstossen und wieder zurückgelangen etc. Was soll dann überhaupt den Unterschied der Erdatmosphäre und des äusseren Mediums ausmachen? Wollte man dies alles in Rechnung ziehen (mit der üblichen Annäherung), so käme man zu den gewöhnlichen Gleichungen der Aërostatik und zu dem leicht abzuleitenden Resultat, dass eben dort wo geringerer Druck herrscht, das ist an der Oberfläche der kleineren Planeten (und Monde), die leichteren Gase vorherrschen werden, nicht, wie Stoney meint, die schwereren.

Die eigentlichen Schwierigkeiten treten aber erst dann auf, wenn man den Einfluss der Konvektionsströme, Temperaturverhältnisse etc. berücksichtigt, welche in erster Linie für die Diffusionsvorgänge massgebend sind, und welche Stoney nicht in Betracht zieht; solange wir hierüber nicht genauere Kenntnisse besitzen, sind derlei Spekulationen aussichtslos. Allerdings wird man bei Anwendung der aëromechanischen Gleichungen auf den Weltraum im allgemeinen noch gewisse Korrekturen an diesen Gleichungen einzuführen haben, die darin begründet sind, dass man in Anbetracht der enormen Verdünnung also der sehr grossen Weglänge λ der Moleküle die Änderungen im Zustande des Gases im Bereiche von λ nicht mehr als linear annehmen darf, sondern höhere Glieder der Entwicklung berücksichtigen muss. Es scheint mir dies jedoch der einzige rationelle Weg zu sein, auf welchem man hoffen kann, einst auch zu genaueren quantitativen Ergebnissen zu gelangen.

(Eingegangen 20. Dezember 1900.)